



ce
pre
UNI

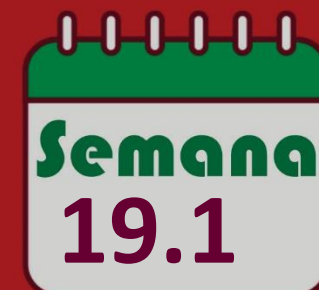
CICLO
PREUNIVERSITARIO

2023-2

Álgebra

TEMA

PROGRESIÓN ARITMÉTICA Y GEOMÉTRICA
BINOMIO DE NEWTON Y POLINOMIO DE LEIBNIZ



CONTENIDOS

- Progresión Aritmética
- Progresión Geométrica
- Binomio de Newton
- Polinomio de Leibniz



ce
pre
UNI

Álgebra

PROGRESION ARITMÉTICA



ce
pre
UNI

Definición.

Una sucesión $\{a_n\}_{n \geq 1}$ de números reales se dice que es una progresión aritmética si para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que: $a_{n+1} - a_n = r$

Donde r es una constante diferente de cero, conocida como la razón.

Notación.

Si $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$ están en progresión aritmética escribiremos

$$\div a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$$

❖ $r > 0 \leftrightarrow$ la progresión aritmética es creciente

Ejemplo $\div 4, 11, 18, 25, \dots$ $r = 11 - 4 = 7$, la progresión aritmética es creciente.

❖ $r < 0 \leftrightarrow$ la progresión aritmética es decreciente

Ejemplo $\div 37, 31, 25, 19, \dots$ $r = 31 - 37 = -6$, la progresión aritmética es decreciente.

TERMINO GENERAL DE UNA PROGRESION ARITMETICA

En la progresion aritmética $\div a_1, a_2, a_3, a_4, \dots a_n$

de razón r , se tiene que:

$$a_2 = a_1 + r$$

$$a_3 = a_2 + r = a_1 + 2r$$

$$a_4 = a_3 + r = a_1 + 3r$$

$$a_5 = a_1 + 4r$$

$$\vdots$$
$$\vdots$$
$$\vdots$$

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

En general:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

SUMA DE LOS "n" PRIMEROS TERMINOS

$$S_n = \left(\frac{a_1 + a_n}{2} \right) \cdot n$$

$$S_n = \left(\frac{2a_1 + (n - 1)r}{2} \right) \cdot n$$

PROPIEDADES

- 1) En toda progresión aritmética de un número impar de términos, existe un término central, el cual es igual a la semisuma del primer y el último término.

$$t_c = a_{\frac{n+1}{2}} = \frac{a_1 + a_n}{2}$$

- 2) En toda progresión aritmética, la suma de los términos equidistantes de los extremos es igual a la suma de los extremos.

Es decir, sean a_k ; a_p dos términos equidistantes de la siguiente P.A.

$$\underbrace{a_1; \dots \quad a_k; \dots}_{k \text{ términos}} \quad \underbrace{a_p; \dots \quad a_n}_{k \text{ términos}}$$

Se cumple que:

$$a_k + a_p = a_1 + a_n$$

MEDIOS

ARITMETICOS

En la progresión aritmética $\div a_1, a_2, a_3, a_4, \dots; a_{n-1}; a_n$ se denominan medios aritméticos a los números $a_2, a_3, a_4, \dots; a_{n-1}$

INTERPOLACION DE MEDIOS ARITMETICOS

Interpolar “m” medios aritméticos entre dos números diferentes “a” y “b”, consiste en formar una progresión aritmética cuyo primer término es “a”, el último termino es “b”, y el número de términos es “m+2”

es decir: $\div a; \dots \dots \dots; b$

“m” medios aritméticos

$$a_{m+2} = a_1 + (m + 2 - 1)r$$

$$b = a + (m + 1)r$$

de donde:

$$r_{\text{int}} = \frac{b - a}{m + 1}$$

llamada razón de interpolación

APLICACIONES

1. En la progresión aritmética $\div 147; 141; 135; \dots$ el primer elemento negativo es:

- A) -1 B) -2 **C) -3** D) -4 E) -5

2. Hallar el número de términos de una progresión aritmética, sabiendo que la suma de los términos no varía al aumentar en 1 la razón y al mismo tiempo disminuir en 30 su primer término.

- A) 60 **B) 61** C) 62 D) 59 E) 63

3. El número de términos de una progresión aritmética creciente, comprendidos entre 23 y 59 es el doble de los comprendidos entre 3 y 23. Calcule el valor del término de lugar 13 de la P.A.

- A) 14 B) 27 C) 36 D) 48 **E) 51**



ce
pre
UNI

Álgebra

PROGRESION GEOMÉTRICA



ce
pre
UNI

Definición.

Una sucesión $\{a_n\}_{n \geq 1}$ de números reales se dice que es una progresión geométrica si para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$

donde q es una constante diferente de cero, conocida como la razón y $a_1 \neq 0$

Notación.

Si $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$ están en progresión geométrica escribiremos

$$\div \div a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$$

❖ Si $a_1 > 0$ y $q > 1$, entonces la progresión geométrica es creciente.

Ejemplo $\div \div 2, 6, 18, 54, \dots$ $q = \frac{6}{2} = 3$, la progresión geométrica es creciente.

❖ Si $a_1 > 0$ y $0 < q < 1$, entonces la progresión geométrica es decreciente.

Ejemplo $\div \div 160, 80, 40, 20, \dots$ $q = \frac{80}{160} = \frac{1}{2}$, la progresión geométrica es decreciente.

TERMINO GENERAL DE UNA PROGRESION GEOMETRICA

En la progresión geométrica $\div\div a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$
de razón q , se tiene que:

$$a_2 = a_1 \cdot q$$

$$a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q^2$$

$$a_4 = a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^3$$

$$a_5 = a_4 \cdot q = a_1 \cdot q^4$$

$$\vdots$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

En general:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

SUMA DE LOS "n" PRIMEROS TERMINOS

$$S_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \dots + a_1 \cdot q^{n-1} = a_1 \cdot \left[\frac{1 - q^n}{1 - q} \right]$$

$$\forall q \neq 1$$

PROPIEDADES

- 1) En toda progresión geométrica de un numero impar de términos, existe un termino central , el cual elevado al cuadrado es igual al producto del primer y el último término.

$$t_c^2 = \left(a_{\frac{n+1}{2}}\right)^2 = \frac{a_1 \cdot a_n}{2}$$

- 2) En toda progresión geométrica, el producto de los términos equidistantes de los extremos es igual al producto de los extremos.

Es decir, sean a_k ; a_p dos términos equidistantes de la siguiente P. G.

$$\div \div a_1; \dots \underbrace{a_k; \dots}_{k \text{ términos}} \underbrace{a_p; \dots}_{k \text{ términos}} ; a_n$$

Se cumple que:

$$a_k \cdot a_p = a_1 \cdot a_n$$

3) En toda progresión geométrica de números positivos, el producto de los términos de dicha progresión es igual la raíz cuadrada del producto del primer y el último término a la potencia n , n es el número de términos.

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n = [\sqrt{a_1 \cdot a_n}]^n$$

MEDIOS GEOMETRICOS

En la progresión geométrica $\div \div a_1, a_2, a_3, a_4, \dots; a_{n-1}; a_n$ se denominan medios geométricos a los términos $a_2, a_3, a_4, \dots; a_{n-1}$

INTERPOLACION DE MEDIOS GEOMETRICOS

Interpolar “ m ” medios geométricos entre dos números diferentes a y b , es formar una progresión geométrica cuyo primer término es “ a ”, el último término es “ b ”, y el número de términos es “ $m+2$ ”.

es decir: $\div \div a; \underbrace{\dots\dots\dots}_{\text{“}m\text{” medios geométricos}}; b$

Se obtiene:

$$q_{\text{int}} = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}$$

llamada razón de interpolación

APLICACIONES

1. En una progresión geométrica de 6 elementos, el primer término es igual a la razón, la suma del primer y tercer término es 30. Calcule la suma de los términos de la progresión.

A) 1092 B) 2184 C) 3276 D) 3289 E) 9840

2. En una progresión geométrica se tiene que $a_1 = 2$, $a_{n-3} = -486$, y $a_n = 13122$. Indique el valor del término a_7

A) 729 B) -729 C) 1458 D) -1458 E) -2196

3. La suma de los 8 primeros términos de una progresión geométrica es igual a 257 veces la suma de sus cuatro términos. Indica el valor de la razón.

A) 2 B) 4 C) 8 D) 16 E) 32

BINOMIO DE NEWTON



ce
pre
UNI

BINOMIO DE NEWTON

Definición:

Para a y b no nulos, y un valor $n \in \mathbb{N}$ se define al binomio de Newton:

$$(a + b)^n$$

Donde “ a ” es la primera Base, “ b ” es la segunda base y “ n ” es el exponente del Binomio

Ejemplos (Casos particulares)

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = C_0^2 a^2 + C_1^2 a^1 b^1 + C_2^2 b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3 = C_0^3 a^3 + C_1^3 a^2 b^1 + C_2^3 a^1 b^2 + C_3^3 b^3$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4 = C_0^4 a^4 + C_1^4 a^3 b^1 + C_2^4 a^2 b^2 + C_3^4 a^1 b^3 + C_4^4 b^4$$

BINOMIO DE NEWTON

Teorema (desarrollo del Binomio de Newton)

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_k^n a^{n-k} b^k$$

Esto es

$$(a + b)^n = \underset{t_1}{C_0^n a^n b^0} + \underset{t_2}{C_1^n a^{n-1} b^1} + \underset{t_3}{C_2^n a^{n-2} b^2} + \dots + \underset{t_n}{C_{n-1}^n a^1 b^{n-1}} + \underset{t_{n+1}}{C_n^n a^0 b^n}$$

De aquí se deduce

- 1) Número de términos del desarrollo: $n+1$
- 2) Término de lugar "p+1": $t_{p+1} = C_p^n a^{n-p} b^p$
- 3) Término central: Para "n" par, el lugar del término central es: $t_c = t_{\frac{n}{2}+1}$

2) Si $a=1$ y $b=1$ se tiene que:

$$2^n = C_0^n + C_1^n + C_2^n + \dots + C_{n-1}^n + C_n^n$$

Aplicación 1, indique el grado del término de lugar 17 en la expansión del binomio

$$\left(x^6 + \frac{1}{x}\right)^{29}$$

Resolución: $n = 29$

$$t_{17} = t_{16+1} = C_{16}^{29} (x^6)^{29-16} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{16}$$

$$t_{16} = C_{16}^{29} x^{78} \cdot x^{-16} = C_{16}^{29} x^{62}$$

Luego, el grado del término es 62

Aplicación 2, Calcule el término independiente de la expansión del binomio:

$$\left(x^4 - \frac{1}{x^8}\right)^{12}$$

Resolución: $n = 18$ Sea el lugar del término “ $k+1$ ”

$$t_{indep.} = t_{k+1} = C_k^{12} (x^4)^{12-k} \cdot \left(-\frac{1}{x^8}\right)^k$$

$$t_{indep.} = C_k^{12} x^{48-4k} \cdot (-1)^k x^{-8k} = C_k^{12} (-1)^k x^{48-12k}$$

Por condición del problema

$$48 - 12k = 0 \quad \Rightarrow \quad k = 4$$

$$t_{indep.} = C_4^{12} (-1)^4 = C_4^{12} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = 495$$

BINOMIO DE NEWTON

Ejercicios

1. Calcule el lugar que ocupa el término de G.A. 28 en el desarrollo del binomio

$$(2x^3 + 5y^2)^{12}$$

A) 7

B) 8

C) 9

D) 10

E) 12

2. Indique el valor de n para que los términos de lugares 7 y 9 en la expansión del binomio

$$\left(\frac{\sqrt{13}x}{2} + y^2\right)^n$$

Admitan el mismo coeficiente.

A) 10

B) 18

C) 19

D) 20

E) 24

POLINOMIO DE LEIBNIZ



ce
pre
UNI

POLINOMIO DE LEIBNITZ

Definición:

Para $a_1; a_2; a_3; \dots a_p$ no nulos y un valor $n \in \mathbb{N}$ definimos al Polinomio de Leibnitz mediante: $(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_p)^n$

Teorema (desarrollo del Polinomio de Leibnitz)

$$(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_p)^n = \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p = n} \frac{n!}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_p!} a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_p^{\alpha_p}$$

Observar que la sumatoria tiene tantos términos como soluciones tiene la ecuación $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p = n$, con $\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_p \in \mathbb{N}_0$ lo cual está dado por la fórmula

$$\text{Número de términos} = C_{k-1}^{n+k-1}$$

POLINOMIO DE LEIBNITZ

Caso particular

Para tres bases

Sea: $(a + b + c)^n$

A) Los términos de su desarrollo según Leibnitz tienen la forma

$$\sum \frac{n!}{\alpha! \beta! \phi!} a^\alpha b^\beta c^\phi$$

donde $\alpha + \beta + \phi = n$

con $\alpha; \beta; \phi \in \mathbb{N}_0$

B) El número de términos sería

$$C_{3-1}^{n+3-1} = C_2^{n+2}$$

Aplicación:

Determine el coeficiente de x^5 en
El desarrollo del polinomio

$$(2x^2 - 3x - 5)^4$$

Resolución: empleando Leibnitz

$$T_g = ax^5 = \sum \frac{4!}{\alpha! \beta! \phi!} (2x^2)^\alpha (-3x)^\beta (-5)^\phi$$

$$T_g = ax^5 = \sum \frac{4!}{\alpha! \beta! \phi!} 2^\alpha \cdot (-3)^\beta \cdot (-5)^\phi x^{2\alpha+\beta}$$

Luego por dato: $2\alpha + \beta = 5$

además: $\alpha + \beta + \phi = 4$

Resolviendo en $\mathbb{N}_0$, obtenemos las
siguientes soluciones:

$$\alpha = 1; \quad \beta = 3; \quad \phi = 0$$

$$\alpha = 2; \quad \beta = 1; \quad \phi = 1$$

Luego, reemplazando cada solución en

$$T_g = \sum \frac{4!}{\alpha! \beta! \gamma!} 2^\alpha \cdot (-3)^\beta \cdot (-5)^\phi x^{2\alpha+\beta}$$

$$T_g = \frac{4!}{1! 3! 0!} 2^1 \cdot (-3)^3 \cdot (-5)^0 x^5 + \frac{4!}{2! 1! 1!} 2^2 \cdot (-3)^1 \cdot (-5)^1 x^5$$

$$T_g = -216 x^5 + 720 x^5 = 504 x^5$$

Por lo tanto el coeficiente de x^5 es 504

Ejercicios

1. Halle el término de grado 6 luego de desarrollar y simplificar

$$(2x^2 + x - 1)^5$$

- A) $54x^6$ B) $30x^6$ C) $-48x^6$ D) $-20x^6$ E) $-30x^6$

2. Determine el coeficiente de x^4 en la expansión del polinomio

$$(1 + 2x + 3x^2)^{10}$$

- A) 7240 B) 7645 C) 8020 D) 8085 E) 8072

COEFICIENTE BINOMIAL

Definición:

Para $n \in \mathbb{R}$ y para $k \in \mathbb{N}_0$ se denota al coeficiente Binomial: $\binom{n}{k}$ donde “n” es el índice superior y k el índice inferior.

El valor del coeficiente binomial es:

$$1) \binom{n}{0} = 1$$

$$2) \binom{n}{1} = n$$

$$3) \text{ Para } k > 1: \binom{n}{k} = \frac{(n)(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)}{1(2)(3) \dots (k)}$$

Ejemplos

$$\binom{1/3}{4} = \frac{(1/3)(-2/3)(-5/3)(-8/3)}{1(2)(3)(4)}$$

$$\binom{-3}{4} = \frac{(-3)(-4)(-5)(-6)}{1(2)(3)(4)}$$

COEFICIENTE BINOMIAL

Propiedades:

1) Para $n \in \mathbb{N}_0$, $k \in \mathbb{N}_0$, $n \geq k$ se cumple que: $\binom{n}{k} = C_k^n$

2) Para $n \in \mathbb{N}_0$, $k \in \mathbb{N}_0$, $n < k$ se cumple que: $\binom{n}{k} = 0$

3) Para $n \in \mathbb{Z}^-$, $k \in \mathbb{N}_0$, se cumple que: Si k es par $\binom{n}{k} > 0$
Si k es impar $\binom{n}{k} < 0$

Ejemplos

$$\binom{5}{3} = \frac{(5)(4)(3)}{1(2)(3)} = C_3^5$$

$$\binom{3}{5} = \frac{(3)(2)(1)(0)(-1)}{1(2)(3)(4)(5)} = 0$$

$$\binom{-3}{4} = \frac{(-3)(-4)(-5)(-6)}{1(2)(3)(4)} > 0$$

BINOMIO DE EXPONENTE REAL

Definición:

Para a y b no nulos, y un valor $n \in \mathbb{R}$ se define al binomio de exponente real:

$$(a + b)^n$$

Teorema Para $x \in \mathbb{R}$ con $|x| < 1$ y un valor $n \in \mathbb{R}$ cumple:

$$(1 + x)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} x^1 + \binom{n}{2} x^2 + \binom{n}{3} x^3 + \dots$$

La convergencia de la serie se puede obtener por el criterio de la razón.

BINOMIO DE EXPONENTE REAL

Ejemplos Considerando $|x| < 1$. Halla en cada caso los cuatro primeros términos

$$(1 + x)^{\frac{1}{3}} =$$

$$(1 + x)^{-2} =$$

$$(1 - x)^{-3} =$$

Ejercicio Calcule con cuatro decimales de aproximación $\sqrt[4]{19.2}$

- A) 2,0935 B) 2,0932 C) 2,0934 D) 2,1932 E) 2,1935